

Il principio di Mach e il teorema di Gödel come sorgenti della fisica quantistica

L'idea centrale del pensiero di Mach, che un corpo materiale sia obbligato al suo movimento solo per la presenza di tutti gli altri corpi dell'universo, ha sostituito l'idea newtoniana di una legge del moto valida in un sistema di riferimento assolutamente immobile.

L'importanza di questa modifica potrebbe sembrare solo formale, se avesse avuto l'unico risultato di sostituire i moti assoluti con quelli relativi ad un sistema delle stelle fisse difficile da definire.

In realtà essa era una critica alla nozione newtoniana di forza, che, in un universo dominato dalla gravitazione, a Mach sembrava inutile, come lo sarebbe in ogni sistema di riferimento in caduta libera in cui la forza potesse essere annullata in una regione finita.

Anche se il conseguente campo uniforme, che un nuovo osservatore accelerato potrebbe vedere nella stessa regione finita non ha alcuna rigorosa realizzazione, la sua possibilità di realizzazione approssimativa è sintomo d'una possibilità approssimativa di eliminare le forze.

Ciò ha fatto supporre a Mach che si sarebbe scoperto un metodo per passare dall'approssimazione al rigore.

"Non è escluso che un giorno leggi integrali (per usare un'espressione di C. Neumann) sostituiranno le leggi elementari della meccanica attuale, e che si riuscirà a conoscere direttamente la dipendenza reciproca delle posizioni dei corpi. Allora l'idea di forza diventerebbe superflua." (La meccanica presentata nel suo sviluppo storico critico)

Bisogna capire come ciò si possa fare.

Nella fisica un oggetto indiviso non può essere altro che l'insieme delle sue manifestazioni o delle sue proprietà suscettibili di esperimento.

Una regola generale del metodo sperimentale è quella d'isolare il più possibile l'oggetto esaminato da tutte le perturbazioni eccetto quella sotto esperimento, e si può provare a fare questo anche nel caso dei corpi in movimento.

Se un completo isolamento in un qualche caso fosse stato realizzato, l'idea di forza sarebbe risultata paradossale, perché essa sarebbe applicata ad un corpo che non resiste; al contrario se il corpo resiste, esso non è isolato e quindi la forza non è applicata solo ad esso.

L'incompletezza dell'isolamento sembra essere una legge di natura e costituisce la sostanza del principio di Mach; contemporaneamente ciò spiega l'esistenza delle proprietà individuali dei corpi.

Poiché l'isolamento coinvolge tutte queste proprietà, bisogna considerare la versione estesa da Rosen di questo principio.

"Mach si contentava di attribuire l'origine dell'inerzia all'intero universo, mentre il presente modello attribuisce l'origine di tutte le leggi della fisica alla stessa sorgente."

Se si accetta che molte proprietà dei corpi stiano fuori di essi, cioè fuori di ciò che siamo abituati a considerare come corpi, contenuti in una superficie chiusa e limitata, bisogna attendersi che i confini delle proprietà individuali dei corpi non siano definiti con rigore.

D'altronde l'insieme delle proprietà individuali di un corpo non può essere vuoto, perché, essendo vero ciò per tutti i corpi, le proprietà di ciascuno verrebbero da un insieme di insiemi vuoti.

Dunque in natura non possono verificarsi i casi estremi, né della totale dipendenza dall'esterno di tutte le proprietà di ciascun corpo, né della totale indipendenza, e questo legame tra tutti i corpi può essere detto principio di Mach in forma estesa ed incompleta.

Se la conoscenza sperimentale è l'effetto delle proprietà dei corpi sull'osservatore e una modifica imprevedibile di esso, suscettibile di misura, l'insieme dei dati che hanno modificato l'osservatore costituisce l'informazione fornita dall'esperimento.

Più che di corpi conviene parlare di parti indivise dell'universo, perché una sua partizione può avvenire in più modi.

L'informazione può provenire dalla natura della partizione o essere indotta in ciascuna parte dalle altre, ma in ogni caso bisogna trattarla con regole dipendenti anche dalla natura dell'osservatore e delle sue categorie in generale valide in domini limitati.

Pur affermando che l'insieme delle p proprietà d'una parte dell'universo o d'un corpo, che sono incommensurabili in un determinato stato della fisica, esige la descrizione dei fenomeni in uno spazio almeno a p dimensioni, non si può introdurre una metrica, fin tanto che non si è in grado di definire una distanza sulla base di esperimenti guidati da una visione generale.

Ciò detto, uno spazio u in cui si può descrivere l'informazione fornita da tutte le parti dell'universo, può essere il prodotto di due sottospazi disgiunti e f .

Lo spazio u , che si può chiamare spazio di Mach, ha un numero di dimensioni pari al numero delle proprietà indipendenti di ciascuna parte, che un osservatore può rilevare (posizione, massa, carica, ecc... in una rappresentazione nella quale le parti sono i corpi).

L'appartenenza di tutti gli osservatori allo stesso universo limiterà il carattere arbitrario delle definizioni delle coordinate di e e l'equivalenza delle loro rappresentazioni porterà ad un principio di relatività generale, ma ciò non fa ostacolo a considerare l'informazione fornita da tutte le parti dell'universo ad un solo osservatore, se esso non è in uno stato speciale (velocità della luce) rispetto a quelle f .

Si può ora tentare di ripartire lo spazio u in elementi con le dimensioni del sottospazio e , ma non si riuscirà ad isolarli, se in u vale la forma del principio di Mach, che afferma la constatazione sperimentale dell'isolamento incompleto tra le parti dell'universo.

Per spiegare questo isolamento incompleto, per quanto elevato possa essere il numero di coordinate di e , devono esistere delle dimensioni di u esterne a e , cioè f non è vuoto.

Si può considerare questo da un altro punto di vista.

Tutti i dati descritti sulle coordinate di e e attribuiti al contenuto dei suoi elementi, costituiscono un insieme di assiomi.

Leggi naturali coinvolgenti questi dati fissati dall'osservatore e attribuiti ad ogni elemento di e sono delle proposizioni generate da tali assiomi.

Discende dal primo teorema di Gödel che un sistema completo di leggi naturali sul sottospazio e non è deducibile da tale insieme di assiomi.

In effetti un insieme di dati che ha il ruolo di distinguere le parti non può essere usato per considerarne l'unione.

Le coordinate dell'elemento di e , più le coordinate del sottospazio e , che può essere chiamato spazio di Gödel, determinano tutta l'informazione contenuta in tutti gli elementi e , e si possono descrivere in tale spazio u i legami tra essi.

L'informazione in u è funzione delle variabili di e e di e , ma l'osservatore può localizzare un elemento solo rispetto ai punti P dello spazio u , che esso ha definito, mentre non può prevedere i valori che prendono le variabili di e .

Il punto di partenza è sempre la divisibilità dell'universo secondo proprietà arbitrarie e l'arbitraria numerazione delle parti secondo una procedura che consente ad ogni osservatore di rappresentare ciascuna parte con un insieme di numeri reali sufficiente a considerarne tutte le proprietà.

Con il crescere del numero di parti la rappresentazione tende a diventare continua e ciascuna parte è rappresentata da un vettore di un campo.

L'osservatore costruisce una fisica quando scopre che è indipendente solo un certo numero di componenti di ogni vettore di u .

Un inciso:(Le comunicazioni di dati fisici e di arbitrii della rappresentazione passano insieme tra un osservatore e l'altro, e si ha una fisica comune se ciascuno è in grado di depurare dagli arbitrii rappresentativi la comunicazione ricevuta.

Un principio di relatività generale impone che tutti gli osservatori debbano trovare le stesse leggi fisiche anche senza che tutti siano nelle stesse condizioni rispetto alle parti circostanti.

Ciò è come dire che la legge di natura deve essere insensibile al particolare insieme di vettori rappresentativi che definiscono ciascun osservatore nel sistema dell'altro.)

Se si indica con P il vettore che ha per componenti le variabili indipendenti di uno spazio \mathcal{P} , quelle dipendenti costituiranno il vettore $v(P)$ dello spazio complementare rispetto a \mathcal{P} .

Se l'informazione in P fosse costituita esclusivamente da $v(P)$, tentando di tradurre il principio di Mach in formule matematiche, ci si accorgerebbe ben presto che le relazioni con l'informazione nei punti di circostanti a P dovrebbero essere solo additive.

Infatti il prodotto di vettori si contrae in uno scalare e la divisione per un vettore non è neppure definita, mentre si presume di eseguire sull'informazione data in tutti i punti P di \mathcal{P} per ottenere quella in un particolare punto Q tutte le possibili operazioni analitiche, finché una formula matematica trovata non riveli l'inutilità di alcune.

Ciò è come dire che la struttura dell'informazione in P deve essere tale che su di essa possano essere eseguite le quattro operazioni che danno luogo a tutte le possibili funzioni elementari e non.

Per ottenere questo risultato è sufficiente associare al vettore $v(P)$ uno scalare di natura diversa da quelli che costituiscono le componenti del vettore e sicuramente incommensurabile con esse, trattando $v(P)$ come una grandezza che verrà scomposta nelle sua componenti solo in uno spazio adeguato al singolo problema.

Si può allora chiamare informazione in P la grandezza composta da uno scalare e da un vettore della forma $I(P) = (s[P], jv[P])$.

L'associazione ordinata di uno scalare s e di un vettore v può essere indicata con (s, jv) e chiamata Sve; j per ora è un fattore di incommensurabilità di v con s .

Le proprietà di gruppo e quelle algebriche degli sve sono trattate in **(Appendice 0)**.

Poiché di ogni sve non nullo è definito un inverso, si possono considerare rapporti incrementali, derivate e funzioni di sve sviluppabili in serie di Laurent, ma per ora, chiarito che somme e prodotti di sve sono ancora sve, si può tornare al loro uso nella formulazione di teorie fisiche che utilizzano solo somme, prodotti, funzioni intere di sve ed integrali.

Ovviamente scalari $(s, j0)$ e vettori $(0, jv)$ della fisica sono particolari sve, ma non si esclude che l'informazione locale nella fisica possa avere anche strutture matematiche più complicate pur rispondendo alle successive equazioni.

Il principio di Mach deve avere una formulazione matematica che introduca i legami esistenti tra le parti dell'universo affermando che nel punto fissato Q , $I(Q)$ sia funzione degli infiniti sve $I(P)$.

Nella formazione dello sve $I(Q)$, gli sve $I(P)$ non possono fornire contributi finiti, ma proporzionali all'elemento d_p a cui il punto P appartiene.

Allora se $f [Q, P, I(P)]$ è una funzione anche dello sve I , al principio di Mach può essere data la forma:

$$M(Q) = \int f [Q, P, I(P)] d_p$$

dove $M(Q)$ è la componente di Mach dell'informazione locale in Q e l'indice a d_p denota sempre la variabile di integrazione.

La componente di Gödel è per sua natura indipendente dalle variabili di \mathcal{P} e può essere indicata come un fattore complesso \mathcal{N} per la componente di Mach in modo che si abbia:

$$I(Q) = \int_{\mathcal{P}} f[Q, P, I(P)] d_{\mathcal{P}} \quad 1)$$

Se il principio di Mach deve essere proposto come la più generale legge fisica, ci sono due ragioni tra loro connesse perché tale forma sia omogenea in $I(P)$:

a) L'esistenza di un termine noto richiederebbe che esso fosse determinato per ogni Q da una legge più generale del principio di Mach contro l'assunto che sia esso.

b) $I(Q)$ deve essere nulla quando tutte le $I(P)$ sono nulle.

A causa di ciò si può porre nella 1) uno sviluppo formale della f che porti a:

$$I(Q) = \int_{\mathcal{P}} \left[a_1 \cdot I(P) + a_2 \cdot I^2(P) + \dots \right] d_{\mathcal{P}}$$

con coefficienti dati da opportune funzioni $a_1 = a_1(Q, P)$ ed a_0 nullo per l'omogeneità.

Tutti gli addendi dell'integrando contengono a fattore comune $I(P)$.

L'altro fattore è ancora una funzione di $Q, P, I(P)$ da determinare in base ad assunti fisici ed ha la forma:

$$N(Q, P) = a_1 + a_2 \cdot I(P) + a_3 \cdot I^2(P) + \dots$$

Se nel corso del lavoro potranno essere determinati i coefficienti dello sviluppo senza contraddizioni, si avrà solo una separazione formale del ruolo dell'informazione locale $I(P)$ da quello del nucleo $N(Q, P)$ che ancora la contiene, ma ciò consentirà di calcolare $I(Q)$, riuscendo ad ottenere un legame tra i vari punti di \mathcal{P} come era stato proposto da Mach.

Come è opportuno che avvenga all'atto di una prima definizione, la funzione $I(Q)$ definita solo dall'equazione:

$$I(Q) = \int_{\mathcal{P}} N(Q, P) \cdot I(P) d_{\mathcal{P}} \quad 2)$$

resta ancora abbastanza vaga: infatti, oltre al fatto che, se ad un valore di $I(Q)$ corrispondono n soluzioni per $I(Q)$, ogni combinazione lineare di queste è ancora soluzione dell'equazione, il nucleo della 2) ha un'infinità di nuclei equivalenti per le stesse soluzioni (**appendice 6**).

$I(P)$ e $I(Q)$ contengono implicitamente \mathcal{P} .

La 2) è un'equazione integrale lineare di Fredholm da integrare su tutto lo spazio \mathcal{P} .

Quando il fattore \mathcal{N} nella 2) è un numero complesso ordinario, si può trovare una forma generale delle soluzioni dell'equazione integrale, prima di fissare il numero delle coordinate di \mathcal{P} e il dominio d'integrazione, ma sarà sufficiente fissarli solo prima di dare le forme particolari.

Le soluzioni ottenute nel caso in cui lo spazio \mathcal{P} sia ad una dimensione restano valide per uno spazio a due, perché si può interpretare la variabile come numero complesso ed applicare il principio di permanenza delle proprietà analitiche.

Per trattare la 2), bisogna fornire qualche definizione relativa alla teoria delle equazioni integrali lineari di Fredholm, che è un'estensione al continuo della teoria delle matrici, considerando gli infiniti valori presi dalla variabile Q del nucleo N(Q,P) come indici del numero infinito di righe e quelli presi da P con lo stesso ruolo per le colonne.

Si definisce nucleo iterato due volte $N^{(2)}(Q,R)$ l'integrale:

$$N^{(2)}(Q,R) = \int N(Q,P) \cdot N(P,R) d_P \quad (3)$$

che è un'estensione al continuo del prodotto di una matrice per se stessa.

Si definisce nucleo iterato di ogni ordine k, $N^{(k)}(Q,R)$, come un'estensione al continuo delle potenze k^{me} della prima matrice N(Q,P) con il procedimento iterativo:

$$N^{(k)}(Q,R) = \int N^{(k-1)}(Q,P) \cdot N(P,R) d_P \quad (4)$$

Come per le matrici con un numero finito di linee, gli elementi diagonali hanno indici uguali, quindi la traccia A_k del k^{mo} nucleo iterato ha la forma:

$$A_k = \int N^{(k)}(Q,Q) d_Q \quad (5)$$

Come per i sistemi lineari omogenei con un numero finito di equazioni e di incognite si deve annullare il determinante dei coefficienti, così per avere soluzioni non nulle dell'equazione 2), deve annullarsi il determinante di Fredholm $D(\lambda)$ un numero finito di volte in ciascun dominio finito del piano.

Questo determinante può anche essere costruito (**Goursat; Cours d'analyse mathématique**), (**Appendice 2 for.35**) anche per mezzo delle tracce A_k del nucleo N(Q,P) e delle sue iterazioni, ovvero per $1 < k < \infty$ secondo l'equazione:

$$D(\lambda) = e^{-\left(A_1 + A_2 \frac{\lambda}{2} + A_3 \frac{\lambda^2}{3} + \dots + A_k \frac{\lambda^{k-1}}{k} + \dots\right)} \quad (6)$$

La variabile λ del piano complesso, non dipendendo da alcuna proprietà di λ , può essere definita in modo arbitrario come una variabile ordinatrice degli zeri di $D(\lambda)$, che sono tutti isolati.

Solo in corrispondenza degli zeri di $D(\lambda)$ esistono soluzioni I(Q) della 2), e per valori di λ differenti da questi zeri non ha senso il principio di Mach, dando il necessario ruolo al caos di consentire l'aggiunta di un'infinità di termini noti nella 2).

Un ordine sugli zeri di $D(\lambda)$ identico per tutti gli osservatori assicura una comunicazione tra essi, senza impedire, che la linea sulla quale tali zeri sono ordinati, sia deformata per i vari osservatori, ma imponendole di non potersi chiudere.

Ora, si possono dare ai numeri A_k per $2 < k < \infty$ valori che annullino $D(\lambda)$ in tutti i punti interi del semiasse reale positivo del piano λ , ponendo $A_k = \lambda^k$ indipendentemente dalla traccia A_1 .

La funzione di Riemann è definita come: $(k) = \frac{1}{n^k}$

e sostituendo le A_k nella 6), quella diventa:

$$D(\) = e^{-[A_1 + (2)\frac{1}{2} + (3)\frac{1}{3} + \dots + (n)\frac{1}{n} + \dots]} \quad 7)$$

Quest'equazione, tralasciando i calcoli (**Appendice 1**), può essere scritta anche nella forma:

$$D(\) = \frac{(\) \text{sen}(\)}{e^{(A_1 - c_e)}} = \frac{e^{-(A_1 - c_e)}}{(1 - \)} \quad 8)$$

dove la costante di Euler ha il valore $c_e = 0,57721\dots$, e la funzione di Euler di seconda specie è definita da:

$$(\) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1} dx$$

La funzione $D(\)$, non riferendosi ad alcun punto P di \mathbb{R} , deve essere considerata misura d'un ordine globale nello spazio \mathbb{R} , che, provenendo dalla possibilità anche incompleta di distinguere i suoi elementi o corpi, fornisce un' informazione, che supera quella contenuta negli elementi, ed è fornita dai loro raggruppamenti ordinati (informazione da complessità).

Per definire l'informazione globale da complessità, bisogna considerare l'intervallo $(-T, T)$ dell'asse reale del piano \mathbb{R} , e calcolare l'integrale:

$$(T, A_1) = \int_{-T}^T D(\) d = \int_{-T}^T \frac{e^{-(A_1 - c_e)}}{(1 - \)} d \quad 9)$$

L'informazione globale completa è data da:

$$(A_1) = \lim_T (T, A_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(A_1 - c_e)}}{(1 - \)} d = e^{A_1 - c_e} \quad 10)$$

Per spiegare la ragione del fatto che l'informazione da complessità è stata definita in questo modo, conviene considerare alcune proprietà degli integrali delle relazioni 9) e 10).

Ponendo $e^{A_1 - c_e} = z$ si può scrivere $f(T, z)$ al posto di (T, A_1) , $F(z)$ al posto di (A_1) e cambiare la variabile di integrazione in $-t$.

Allora si ha :

$$f(T,z) = \int_{-T}^T \frac{z^{-t}}{(1-)} dt = \int_{-T}^T \frac{z^t}{(t+1)} dt \quad (11)$$

$$F(z) = \int_{-T}^T \frac{z^t}{(t+1)} dt = e^z \quad (12)$$

Nell'ipotesi $z > 1$ il risultato dell'integrale della 12) è giustificato dal fatto che la derivazione rispetto a z sotto il segno di integrale non modifica l'integrale stesso.

Le questioni di convergenza a zero dell'integrando in corrispondenza agli estremi sono trattate alla fine dell'**appendice 1**.

Se si divide per mezzo di un punto T l'intervallo d'integrazione $(- ,)$ e si calcola la derivata $F'(z)$ si ottiene:

$$F'(z) = \int_{-T}^T \frac{tz^{t-1}}{t(t)} dt + \int_{-T}^T \frac{tz^{t-1}}{t(t)} dt = \int_{-T}^{T-1} \frac{z^t}{(t+1)} dt + \int_{-T-1}^T \frac{z^t}{(t+1)} dt = F(z)$$

Ne consegue che la derivazione d'ordine n di $F(z) = e^z$ porta in $T-n$ il punto di separazione con cui è stato diviso l'intervallo $(- ,)$, cioè le derivazioni di $F(z)$ portano l'origine del piano complesso t nel senso positivo dell'asse reale, mentre $F(z)$ eguaglia ogni sua derivata.

Ora si può considerare una funzione informazione globale $O_h(T,z)$, che differisca da $F(z)$ per un polinomio in z di grado h .

Poichè essa perviene a $F(z)$ dopo h derivazioni mentre l'origine del piano t va in $+h$, ci si deve attendere che la funzione informazione globale incompleta di provenienza, per lo stesso spostamento dell'origine nel senso opposto, sia ricostruita con h costanti arbitrarie.

Invece se una funzione $S_k(T,z)$ differisce da $F(z)$ per un polinomio di grado k in $\frac{1}{z}$, le derivazioni successive non avvicinano $S_k(T,z)$ a e^z , ma l'avvicinamento avviene in ogni modo per grandi valori di z .

Se ora $O_h(T,z)$ e $S_k(T,z)$ sono le parti regolare e singolare d'una funzione analitica $G(T,z)$, questa, anche potendo essere vicina a e^z per z lontana dall'origine e dal punto all'infinito, diventerà imprevedibile per spostamenti dell'origine nel senso negativo dell'asse reale del piano t .

Resta da scoprire come tale insieme di funzioni possa essere approssimato con integrali simili a quello della 11) ed è motivo di studio la trasformazione dell'integrale 12) in un altro che si calcoli sull'intervallo $(- ,)$ dell'asse immaginario in modo che il suo risultato abbia senso nell'origine arbitraria dell'asse reale, ma ora conviene cercare di comprendere il significato fisico di z .

Per fare ciò, si può considerare la contraddizione, che sia possibile ripartire un dominio dell'universo in n parti senza una proprietà per distinguerle.

Mancando di ogni proprietà (anche di posizione) non ha senso contarle.

Dunque per essere contate le n parti devono avere la distinzione necessaria.

Appena le n parti esistono con almeno una proprietà per distinguerle, esse possono essere caricate a caso di quella proprietà in tanti modi differenti, quante sono le 2^n disposizioni con ripetizione di classe n dei due stati di dotato o mancante di quella proprietà binaria.

Conseguentemente le n parti che si possono contare e i 2^n oggetti distinti che formano l'informazione minima da complessità su quelle parti, nascono insieme.

Quale maggior realtà fisica possiedono le n parti rispetto ai 2^n dati costituiti dalla somma delle parti più le loro coppie, gli insiemi di tre, quattro, ecc. ?

Allora il numero 2^n di questi oggetti può essere esponente della base 2 d'una nuova partizione ottenuta per effetto d'un'altra proprietà binaria, e il procedimento iterato ha senso nel caso di una divisibilità indefinita in parti.

Ora si può passare dal caso semplice di una proprietà binaria a quello di una proprietà che le n parti acquistano con H numeri prodotto del numero di proprietà per i gradi di dettaglio.

In tal caso compaiono nello stesso tempo le n parti e gli $H^n = e^{n \ln H}$ dati dell'informazione e anche in questo caso si può iterare il procedimento.

Si può definire il passo di questo processo ricorsivo di distinzione in parti in modo irrispettoso della differenza tra il numero n di parti e il numero H di gradi di dettaglio delle proprietà, perché bisogna dichiararsi incapaci di scoprirla.

Si può definire a tal fine il moltiplicatore $m = \frac{e^{n \ln H}}{n \ln H}$, che associa sempre $z = n \ln H$ parti dotate di proprietà all'informazione corrispondente e^z , imponendo $H > 1$, se non si vuole descrivere un universo indifferenziato.

Ricordando di aver posto $e^{A_1 - c} = z$, si è dimostrato che l'ultimo termine della 10)

$e^{A_1 - c}$ è un'informazione globale nel senso della definizione data.

Interpretando la componente reale di $e^{A_1 - c}$ come il tempo ordinario, questo risulta legato al carattere di infinita divisibilità degli oggetti, e la presenza correlata di essi si realizza soltanto in una successione di istanti come una interferenza costruttiva dovuta alla sovrapposizione dell'informazione proveniente da tutti i punti di $e^{A_1 - c}$.

La disposizione precedente di tali istanti negli interi positivi dell'asse reale del piano corrisponde solamente all'arbitrio di considerare uniforme il moto degli orologi e costanti le frequenze degli atomi.

Inoltre nulla che si possa sperimentare su un corpuscolo, può accadere in un tempo inferiore all'intervallo unitario tra gli interi.

Ne consegue che, sempre nell'ipotesi del moto uniforme degli orologi, ogni periodo di un qualsiasi fenomeno oscillatorio della materia, deve risultare intero, e ciò esclude le frequenze infinite e poi le energie infinite.

Ora si può passare alla risoluzione dell'equazione integrale 2), utilizzando la definizione di minore di $D(\)$ data da Fredholm (**Goursat; Cours d'analyse mathématique**), (**Appendice 2**).

Si può ammettere che il primo minore non nullo di $D(\)$ sia di primo ordine (nel quale si cancella una sola linea di indice Q ed una sola colonna di indice R , e può essere indicato con: $D \begin{vmatrix} Q \\ R \end{vmatrix}$

Allora, come mostra Fredholm, (**appendice 2**) la soluzione ha la forma:

$$D \left| \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right| = N(Q,P) \cdot D \left| \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right| d_P \quad (13)$$

e per gli elementi diagonali vale (**appendice 2**) la relazione:

$$D \left| \begin{matrix} Q \\ Q \end{matrix} \right| d_Q = -D'(\cdot) \quad (14)$$

Nell'esiguo insieme degli interi dell'asse reale positivo del piano , che sono i valori caratteristici della 13), l'informazione locale può essere costruita a partire dal coefficiente di influenza $N(Q,P)$ o $N \begin{matrix} Q \\ P \end{matrix}$ in forma di matrice colonna e delle sue iterazioni secondo le due formule seguenti (**appendice 2**):

$$D \left| \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \sum_{n-k}^n (-1)^k c_{n-k} N^{(k+1)} \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \quad (15)$$

$$D \left| \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right| = D(\cdot) \cdot N \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} + \cdot N^{(2)} \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} + \cdot^2 \cdot N^{(3)} \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} + \dots \quad (16)$$

Il fattore tra parentesi quadre di quest'ultima equazione è detto nucleo risolvente o risolvente dell'equazione integrale non omogenea.

Tale definizione di risolvente ubbidisce alle equazioni funzionali:

$$R \left| \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right| = N \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} + N \begin{matrix} Q \\ P \end{matrix} \cdot R \left| \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right| d_P$$

$$R \left| \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right| = N \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} + N \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \cdot R \left| \begin{matrix} Q \\ P \end{matrix} \right| d_P$$

ma queste stesse equazioni sono verificate da una più vasta classe di funzioni analitiche di cui la precedente definizione di risolvente è solo la parte intera.

Indicando con $S \left| \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right|$ una parte principale verificante le equazioni funzionali per le risolventi, la definizione ampliata di risolvente è espressa dalla funzione analitica di :

$$R \left| \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right| = S \left| \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right| + N \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} + \cdot N^{(2)} \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} + \cdot^2 \cdot N^{(3)} \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} + \dots \quad (17)$$

Se la funzione ha solo poli del primo ordine e p è uno di essi di residuo $r(Q,R)$, il suo sviluppo è dato da:

$$R \left. \frac{Q}{R} \right|_{-p} = \frac{r(Q,R)}{-p} + N \frac{Q}{R} + (-p) \cdot N^{(2)} \frac{Q}{R} + (-p)^2 \cdot N^{(3)} \frac{Q}{R} + \dots$$

In questo caso la prima equazione funzionale tra risolventi si scrive:

$$\frac{r(Q,R)}{-p} + N \frac{Q}{R} + (-p) \cdot N^{(2)} \frac{Q}{R} + (-p)^2 \cdot N^{(3)} \frac{Q}{R} + \dots =$$

$$= N \frac{Q}{R} + N \frac{Q}{P} \cdot \frac{r(P,R)}{-p} + N \frac{P}{R} + (-p) \cdot N^{(2)} \frac{P}{R} + (-p)^2 \cdot N^{(3)} \frac{P}{R} + \dots \quad d_P =$$

$$= N \frac{Q}{R} + (-p) \cdot N \frac{Q}{P} \cdot \frac{r(P,R)}{-p} + N \frac{P}{R} + (-p) \cdot N^{(2)} \frac{P}{R} + (-p)^2 \cdot N^{(3)} \frac{P}{R} + \dots \quad d_P +$$

$$+ p \cdot N \frac{Q}{P} \cdot \frac{r(P,R)}{-p} + N \frac{P}{R} + (-p) \cdot N^{(2)} \frac{P}{R} + (-p)^2 \cdot N^{(3)} \frac{P}{R} + \dots \quad d_P$$

Eguagliando i coefficienti delle potenze di $(-p)$ nei due membri, si trova oltre a relazioni note che deve valere anche la:

$$r(Q,R) = p \cdot N \frac{Q}{P} r(P,R) \quad d_P$$

che, dovendo in seguito distinguere i residui in diversi punti, conviene indicarli riscrivendo la precedente equazione nella forma:

$$r_p \frac{Q}{R} = p \cdot N \frac{Q}{P} r_p \frac{P}{R} \quad d_P$$

Con lo stesso procedimento si ottiene dalla seconda equazione funzionale:

$$r_p \frac{Q}{R} = p \cdot N \frac{P}{R} r_p \frac{Q}{P} \quad d_P$$

e ciò dimostra che si hanno soluzioni della 2) con risolventi singolari.

Poiché la 8) assicura di poter risolvere la 2) o la 13) per k intero positivo annullando del primo

ordine $D(\cdot)$, la 16) impone una singolarità polare del primo ordine alla funzione analitica di $R \left. \frac{P}{R} \right|$

.

La funzione $R \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|$ è la stessa che consente di risolvere per k soltanto equazioni integrali non omogenee, che descrivono un universo nel quale non vale il principio di Mach, perché l'informazione locale può differenziarsi da quella relativa agli altri punti di ρ per un termine noto anche arbitrario. Trascurando di esaminare il senso di ciò, conviene considerare una proprietà del nucleo risolvete, che per ρ intero positivo dà una forma della soluzione che risolve nello stesso tempo l'equazione omogenea (13) e l'equazione omogenea associata.

Questa proprietà valida per ogni coppia ρ_1 e ρ_2 di valori di ρ è descritta da l'equazione seguente (**Goursat- opera citata**) oppure (**appendice 4 for.2**) :

$$R \left. \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right|_{\rho_1} - R \left. \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right|_{\rho_2} = (\rho_1 - \rho_2) \left(R \left. \begin{matrix} Q \\ P \end{matrix} \right|_{\rho_1} - R \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho_2} \right) d \rho \quad (18)$$

che per ρ_1 e ρ_2 tendenti all'unico valore ρ fornisce la derivata:

$$R, \left. \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right|_{\rho} = R \left. \begin{matrix} Q \\ P \end{matrix} \right|_{\rho} - R \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho} d \rho \quad (19)$$

La soluzione della (13) espressa dalle (15) e (16) è una funzione senza zeri negli interi positivi, perché, se fosse vero il contrario, la relazione (14) imporrebbe zeri a $D'(\rho)$ contro l'ipotesi che negli stessi punti $D(\rho)$ abbia zeri del primo ordine.

Allora la (16) fornisce una forma del nucleo risolvete come un rapporto tra una funzione senza zeri ed una che li possiede negli interi positivi espressa da:

$$R \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho} = \frac{D \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho}}{D(\rho)} = D \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho} \frac{z}{(\rho) \text{sen}} \quad (20)$$

Il residuo nel generico polo del primo ordine del nucleo risolvete è dato da:

$$r_k \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow k} (\rho - k) \cdot D \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho} \frac{z}{(\rho) \text{sen}}$$

e a calcoli eseguiti prende la forma:

$$r_k \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho} = \frac{(-1)^k \cdot z^k}{(k-1)!} \cdot D \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho} \quad (21)$$

Una nuova forma del nucleo risolvete è espressa dal teorema di Mittag-Leffler, noti il valore $N \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho}$ di

quel nucleo nell'origine del piano ρ ed il valore dei residui $r_k \left. \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right|_{\rho}$ nei suoi infiniti poli.

Tale forma è la seguente:

$$r_k^P \Big|_R = N^P_R + \sum_1 r_k^P \cdot \frac{1}{-k} + \frac{1}{k} \quad (22)$$

Introdotta la 22) e la sua derivata in rapporto a k nella 19), e uguagliati i coefficienti di $-k$ nei due membri, si trova (**appendice 3**), che r_k^P è un'informazione locale, perché risolve la 2) e l'equazione omogenea associata, che il nucleo due volte iterato $N^{(2)P}_R$ è composto da contributi newtoniani (cioè proporzionali a $\frac{1}{k^2}$ dei residui negli infiniti poli secondo la:

$$N^{(2)P}_R = - \sum_1 r_k^P \frac{1}{k^2} \quad (23)$$

I residui restano anche legati tra loro dalle due relazioni:

$$-r_k^Q = r_k^Q \frac{Q}{P} - r_k^P \frac{P}{R} \quad (24)$$

$$r_i^Q \frac{Q}{P} - r_h^P \frac{P}{R} = 0 \quad \text{per } i = h \quad (25)$$

La 24) è un'equazione integrale che coincide con l'equazione omogenea associata, di cui si può considerare nucleo la funzione $r_k^Q \frac{Q}{P}$, con un valore caratteristico unico

$= -1$ del parametro inespreso posto a fattore dell'integrale per ogni k .

Per ogni punto fissato R una funzione della stessa forma del nucleo è auto-funzione corrispondente al valore caratteristico $= -1$ (**Goursat; Cours d'analyse mathématique equat. integr. noyaux princ.**).

Se la molteplicità di tale valore caratteristico è $n+1$, solo un numero finito $n+1$ di auto-funzioni indipendenti $f_{k_0}(P) \dots f_{k_n}(P)$ può corrispondere a quel valore.

Allora per ciascuno degli infiniti valori di R la forma lineare che fornisce $r_k^P \frac{P}{R}$ si comporrà di un numero $n+1$ di funzioni $f_{k_i}(P)$ linearmente indipendenti per $0 \leq i \leq n$ con coefficienti g di funzioni solamente di R , e avrà la forma:

$$r_k^P \frac{P}{R} = f_{k_0}(P) g_{k_0}(R) + f_{k_1}(P) g_{k_1}(R) + \dots + f_{k_n}(P) g_{k_n}(R) \quad (26)$$

Sostituendo nella 24) questa forma si ottiene:

$$f_{k_0}(Q) g_{k_0}(R) + \dots + f_{k_n}(Q) g_{k_n}(R) =$$

$$= - [f_{k_0}(Q) g_{k_0}(P) + \dots + f_{k_n}(Q) g_{k_n}(P)] \cdot [f_{k_0}(P) g_{k_0}(R) + \dots + f_{k_n}(P) g_{k_n}(R)] d_P$$

e paragonando i due membri si osserva che nel primo non compaiono prodotti del tipo:

$$f_{k_i}(Q) g_{k_j}(R) \text{ con } i \neq j \text{ che provengono dal secondo.}$$

Bisogna concludere che per ogni integrale in cui si può scomporre il secondo membro valga la condizione:

$$g_{k_i}(P) f_{k_j}(P) d_P = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

mentre per $i = j$ deve valere la:

$$f_{k_i}(Q) g_{k_i}(R) = - [f_{k_i}(Q) g_{k_i}(P)] \cdot [f_{k_i}(P) g_{k_i}(R)] d_P$$

ed essendo estraibili dall'integrale nell'ordine le funzioni $f_{k_i}(Q)$ e $g_{k_i}(R)$ e ridefinendo le f o le g con il segno cambiato, complessivamente si può scrivere:

$$g_{k_i}(P) f_{k_j}(P) d_P = \delta_{ij} \tag{27}$$

La 26) fornisce per $r_k \in \mathbb{R}^P$ uno sviluppo in successione di funzioni ortonormali.

Poichè $D \in \mathbb{R}^P$ soluzione della 13) è limitata, l'equazione 21) mostra che $r_k \in \mathbb{R}^P$ tende rapidamente a zero al crescere di k .

L'iterazione $N^{(2)} \in \mathbb{R}^P$ del coefficiente di influenza $N \in \mathbb{R}^P$ espressa dalla 23) come somma di infiniti residui è approssimativamente invariata, se la somma termina ad un valore di k sufficientemente elevato invece che all'infinito.

Questo spiega l'apparente stabilità nel tempo del coefficiente di influenza e per conseguenza di tutte le leggi di natura.

Bisogna fare ora due collegamenti tra risultati sperimentali e teorici.

Le recenti scoperte sui raggi cosmici, che limitano a 10^{22} elettroni-volt la massima energia di particelle riscontrata in diversi esperimenti, forniscono una misura della distanza temporale tra i valori singolari di ω imposti dalla risolubilità dell'equazione 2).

Infatti, se si suppone che tale energia sia un confine invalicabile, il suo valore di circa

10^3 coulomb-volt diviso per la costante di Plank $2 \cdot 10^{-34}$ joule-sec. associa a tale energia intervalli temporali di 10^{-36} secondi.

Una seconda considerazione riguarda l'irrelevanza macroscopica della grana temporale riscontrata che consente la trattazione della relatività ristretta in uno spazio-tempo continuo con l'avvertenza che i valori singolari di ω in cui si realizza una connessione tra tempo e materia sono distribuiti solo sul semiasse positivo e limitano lo studio al semicono di luce del futuro.

Per la ricerca di un valore più preciso del periodo fondamentale o della frequenza massima potranno essere eseguiti in futuro esperimenti presso acceleratori di particelle registrando differenze di frequenze che siano sottomultipli interi della frequenza cercata.