Modifica del moto

Alcune formule della teoria della relatività ristretta sono state ricavate in "**Composizione dei moti"** pur ammettendo la discretezza degli istanti in cui la materia è presente e osservabile, a patto di considerare soltanto moti che siano da sempre rimasti uniformi come anche la teoria ammette nel continuo.

Ciò si spiega tenendo conto del fatto che una velocità costante è, sia rapporto di incrementi finiti, sia di differenziali, riguardanti lo stesso moto.

Non è invece più possibile inglobare in una teoria del discreto quella della relatività generale, perché essa è essenzialmente una teoria differenziale, e quindi la spiegazione delle proprietà dinamiche dei corpi accelerati dovrà seguire un'altra strada.

Infatti sono propri della relatività generale i concetti di massa e di energia che sono stati introdotti nella relatività ristretta dalla meccanica classica, ma che non possono essere definiti in una teoria che non prevede accelerazioni e riguarda le trasformazioni lineari che hanno la proprietà di lasciare invariate le equazioni dell'elettromagnetismo macroscopico tra osservatori con moti relativi uniformi.

La massa è definibile in presenza di accelerazioni o degli equivalenti campi gravitazionali di cui è dotato o in cui è immerso anche un possibile osservatore accelerato, e l'energia lo è pure negli stessi casi.

Per studiare ciò, bisogna fare alcune premesse e ricordare che nel testo **"Il principio di Mach...."** è già stata considerata la necessità di un processo ricorsivo di distinzione in parti dell'universo.

Tale processo introduce nella rappresentazione l'arbitrio della fissazione degli elementi indivisi con cui si si formeranno strutture mediante legami originati da proprietà fissabili nello spazio di Mach.

La rotazione su se stessi degli indivisi non ha senso, perché, non avendo essi parti, non può essere definita.

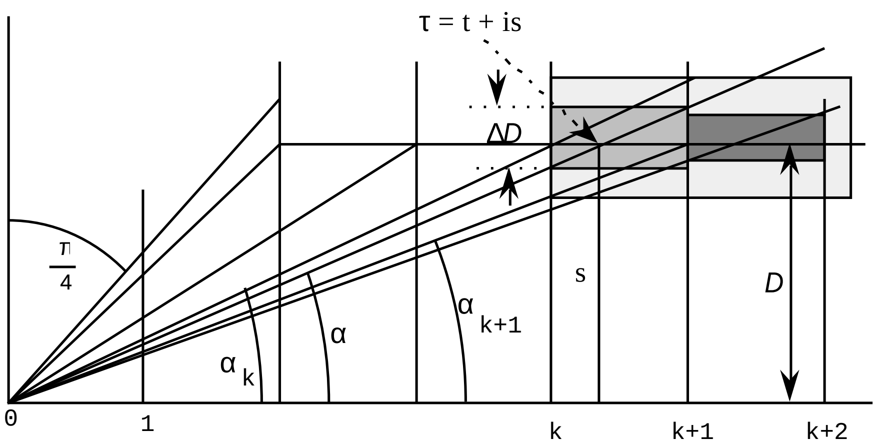
Si è già incontrata in "**Composizione dei moti"** una struttura rigida consistente nel segmento di lunghezza D parallelo all'asse immaginario e indipendente da τ ottenuto attraverso due (ipotetici per la relatività ristretta) cambiamenti di velocità uguali e contrari.

Questa indipendenza colloca la misura del segmento tra le grandezze misurabili dello spazio di Mach, che per ora può essere considerato uno spazio unidimensionale di moduli di vettori e che aumenterà le dimensioni quando dovranno essere considerati contemporaneamente più moti reciproci.

Se la lunghezza di un segmento può restare invariata per un tempo $\mathrm{Re}(\tau)$ sufficientemente lungo, potrà essere misurata con precisione limitata come si vedrà tra poco.

Dal piano τ emerge soltanto un modulo di vettore D e la geometria riguarderà lo spazio σ.

A questo punto conviene riportare la figura incontrata in "**Composizione dei moti"** e fare con l'aiuto di questa alcune considerazioni.



La distanza *D* è raggiungibile in modo preciso solo dall'insieme numerabile di velocità corrispondente agli angoli α_k, α_{k+1},...... con $\alpha_\infty = 0$ punto di accumulazione.
Senza contare la sensibilità finita degli strumenti di misura, esisterà un errore massimo ΔD_m associato all'intervallo (k ; k+1) (punteggiatura più rada) maggiore degli errori ΔD associati alle singole misure negli intervalli unitari successivi per le velocità non appartenenti al precedente insieme.
A partire dall'istante k si determina quindi una striscia di indeterminatezza larga ΔD_m e una distanza *D* indipendenti da τ che si fissano nello spazio di Mach σ.
Ad una velocità prossima a quella della luce l'errore sulla misura è prossimo alla grandezza misurata, ma l'informazione è distribuita in σ sempre secondo funzioni ortogonali espresse dalle formule 26) e 27) del testo **"Il principio di Mach...."** qui riportate

$$r_k\left(\frac{P}{R}\right) = f_{k0}(P)\, g_{k0}(R) + f_{k1}(P)\, g_{k1}(R) + \cdots\; f_{kn}(P)\, g_{kn}(R) \qquad 26)$$

$$\int_\sigma g_{ki}(P)\, f_{kj}(P)\, d\sigma_P = \delta_{ij} \qquad 27)$$

Evidentemente il prodotto $g_{ki}(P)\, f_{ki}(P)$ è un quadrato integrabile di una funzione $F_{ki}(P)$ che differisce da $g_{ki}(P)$ per un fattore non nullo che $f_{ki}(P)$ ha come divisore.
Le condizioni di ortogonalità temporale e spaziale forniscono soluzioni per i residui in termini di funzioni di Hermite per uno spazio σ unidimensionale e come funzioni di Laguerre e di Legendre in uno spazio σ tridimensionale.(vedere **-- Soluzioni unidimensionali** e **Soluzioni tridimensionali**)

Chiarito che alle basse velocità e operando per tempi lunghi la contemporanea misura di posizione e della velocità stessa produce errori impercettibili, si può passare a considerare come due osservatori vedano modificarsi le componenti di τ e di τ' a causa dell'essere in punti diversi R e R' di σ (accelerazioni gravitazionali diverse).
Un osservatore (abbastanza piccolo) che fa solo esperimenti locali in caduta libera o in orbita non può distinguere il suo stato da quello dell'osservatore in moto rettilineo uniforme (Principio di equivalenza).
In particolare deve trovare due linee perpendicolari in quel punto che egli considera rette ed assi cartesiani del suo piano complesso τ o τ'.
Siccome ciò deve essere vero per tutti gli osservatori orbitanti, la trasformazione tra i piani complessi τ

e τ' di due di essi deve essere conforme, e tra queste trasformazioni vanno scelte quelle che conservano la velocità della luce.
Allora una tale funzione analitica invertibile $\tau = \Phi(\tau')$ permette scrivere un nuovo determinante di Fredholm

$D(\tau') = \dfrac{\Gamma[\Phi(\tau')]\ \mathrm{sen}[\pi\Phi(\tau')]}{\pi \cdot z^{\Phi(\tau')}}$, perché se valeva $D(0) = 1$ e $D(k) = 0$ per ogni valore k reale intero positivo di τ per la funzione $D(\tau) = \dfrac{\Gamma(\tau)\ \mathrm{sen}(\pi\tau)}{\pi \cdot z^{\tau}}$ ciò resterà vero dopo la sostituzione per quei valori di τ' che portano D(τ) ad avere i valori 1 e 0.

Se τ è il tempo complesso di un osservatore **A** posto in R, e τ' quello dell'osservatore **B** in R', entrambi dotati di un moto che non sanno distinguere da quello uniforme, vedranno conservarsi gli angoli, ma non conservarsi l'allineamento degli zeri di D(τ) osservato da **B**, e D(τ') osservato da **A** .
In generale le parallele agli assi t ed s del piano complesso τ di **A** saranno viste da **B** come due famiglie di linee ortogonali con due linee speciali (rette su cui corre la luce) $\tau = r \cdot e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ che si trasformano in se stesse e varrà anche l'inverso.
Ciò è esprimibile nella corrispondenza per cui $(t - is)(t + is) = 0$ implica $(t' - is')(t' + is') = 0$

Se $\bar{\tau}$ è il coniugato di τ, la trasformazione $\tau' = \dfrac{\bar{\tau}}{|\tau|^2}$ riscritta come $t'+is' = \dfrac{t}{t^2+s^2} - \dfrac{is}{t^2+s^2}$ manda all'infinito le rette di luce e fornisce

$$t' = \frac{t}{t^2+s^2} \qquad - s' = \frac{s}{t^2+s^2}$$

le cui derivate parziali danno

$$t'_{,t} = \frac{s^2 - t^2}{(t^2+s^2)^2} \qquad t'_{,s} = \frac{-2ts}{(t^2+s^2)^2}$$

$$- s'_{,t} = \frac{-2ts}{(t^2+s^2)^2} \qquad - s'_{,s} = \frac{t^2 - s^2}{(t^2+s^2)^2}$$

e da ciò consegue

$$t'_{,t} = s'_{,s} \qquad t'_{,s} = - s'_{,t}$$

che sono le condizioni di analicità di Cauchy e la trasformazione è conforme.

Se due trasformazioni della forma $\dfrac{\bar{\tau}'}{|\tau'|^2} = \tau'''$ e $\tau'' = \dfrac{\bar{\tau}}{|\tau|^2}$ sono tra loro legate da una funzione analitica intermedia $\tau''' = F(\tau'')$ che trasforma il punto all'infinito di τ'' in quello di τ''', la trasformazione complessiva $\tau' = \Phi(\tau)$ è conforme e trasforma in se stesse le linee di luce ed è il prodotto delle tre trasformazioni

$$\frac{\bar{\tau}'}{|\tau'|^2} = \tau''' \ ; \ \tau''' = F(\tau'') \ ; \ \tau'' = \frac{\bar{\tau}}{|\tau|^2} \quad \text{è della forma} \quad \frac{\bar{\tau}'}{|\tau'|^2} = F\left(\frac{\bar{\tau}}{|\tau|^2}\right).$$

Evidentemente l'origine è un punto critico della trasformazione complessiva $\tau' = \Phi(\tau)$, ma , dovendo essere $D(0) = 1$ il determinante di Fredholm dell'equazione integrale 13) del testo **"Il principio di Mach...."** , la risolvente non è singolare in tal punto ed il residuo è nullo per i due osservatori che scelgono quello zero.

Pur non potendo dimostrare che la trasformazione $\tau' = \dfrac{\bar{\tau}}{|\tau|^2}$ sia l'unica conforme utilizzabile per il processo descritto, resta il fatto che un'infinità di funzioni analitiche $\tau''' = F(\tau'')$ ha la proprietà di far corrispondere i punti all'infinito di τ''' e τ'' .
A tal fine è sufficiente che la parte olomorfa del loro sviluppo in serie di Laurent sia diversa da zero e almeno lineare.

Conviene esaminare subito il caso in cui tale parte olomorfa si riduce ad una funzione lineare con costante complessa m per cui $\tau''' = m\cdot\tau''$, la trasformazione complessiva $\tau' = \Phi(\tau)$ si riduce a

$$\frac{\bar{\tau}'}{|\tau'|^2} = m \cdot \frac{\bar{\tau}}{|\tau|^2}$$ e $|m|$ è un rapporto tra le unità di misura e si può porre $|m| = 1$.

A parte la trasformazione identica per $m = 1$, se m ha modulo unitario diventa $\dfrac{\bar{\tau}'}{|\tau'|^2} = e^{i\theta}\cdot\dfrac{\bar{\tau}}{|\tau|^2}$

$$\frac{t'}{t'^2+s'^2} - \frac{is'}{t'^2+s'^2} = e^{i\theta}\cdot\left(\frac{t}{t^2+s^2} - \frac{is}{t^2+s^2}\right) = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot\left(\frac{t}{t^2+s^2} - \frac{is}{t^2+s^2}\right)$$

$$\frac{t'}{t'^2+s'^2} = \cos\theta\cdot\frac{t}{t^2+s^2} + \mathrm{sen}\,\theta\cdot\frac{s}{t^2+s^2}$$

$$\frac{s'}{t'^2+s'^2} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\frac{t}{t^2+s^2} + \cos\theta\cdot\frac{s}{t^2+s^2}$$

All'asse s' corrisponde in τ la retta che pone $t' = 0$ che è $t\cdot\cos\theta + s\cdot\mathrm{sen}\,\theta = 0$ e all'asse t' la retta $-\,t\cdot\mathrm{sen}\,\theta + s\cdot\cos\theta = 0$
Se anche i moduli dei vettori sulle linee di luce $t'^2+s'^2 = t^2+s^2$ si conservano , questa è la trasformazione tra osservatori in moto uniforme già considerata in"**Composizione dei moti**"con $\theta = \alpha$.
Finora è stato trattato il caso in cui due osservatori posti in R e R' esaminano gli effetti delle rispettive localizzazioni nei propri spazi σ rispetto ad un punto osservato P che ritengono sia lo stesso.
Al punto P vengono associati i residui di una funzione risolvente nelle singolarità che si ripetono ad ogni intero reale positivo dei rispettivi piani complessi τ e τ' e determinano in ciascun piano una linea di punti singolari che è fissabile in σ.
Tra i casi studiati in cui l'osservatore **A** in R collega le sue osservazioni a quelle di **B**, rientra il caso in cui il punto P, ritenuto da entrambi lo stesso, coincide con il punto R' in cui è situato **B** .
Anche l'autosservazione (P = R') di **B** si trasforma in modo conforme attraverso la stessa funzione analitica che trasforma l'informazione relativa al generico punto P e conserva le linee di luce.
Per l'osservatore **A** quello in P è un oggetto da osservare, ma l'informazione in P è definita da **B** nei suoi spazi τ e σ secondo le equazioni 21) e 14) del testo **"Il principio di Mach...."** secondo cui

$$r_k\left(\frac{P}{P}\right) = \lim_{\tau\to k}(\tau-k)\cdot D\left(\frac{P}{P}\middle|\,\tau\right)\frac{\pi z^{\tau}}{\Gamma(\tau)\,\mathrm{sen}\,\pi\tau}$$ e per effetto della 14) si ottiene:

$$\int_\sigma r_k\left(\frac{P}{P}\right) d\sigma_P = \lim_{\tau\to k} (\tau-k)\cdot z^{\tau}\cdot\Gamma(1-\tau)\cdot \int_\sigma D\left(\left.\frac{P}{P}\right|^{\tau}\right) d\sigma_P$$

$$\int_\sigma r_k\left(\frac{P}{P}\right) d\sigma_P = \lim_{\tau\to k} (\tau-k)\cdot z^{\tau}\cdot\Gamma(1-\tau)\cdot \frac{d}{d\tau}\left[\frac{z^{-\tau}}{\Gamma(1-\tau)}\right]$$

$$\int_\sigma r_k\left(\frac{P}{P}\right) d\sigma_P = \lim_{\tau\to k} (\tau-k)\cdot z^{\tau}\cdot\Gamma(1-\tau)\cdot \frac{\Gamma'(1-\tau)\cdot z^{-\tau} - \ln(z)\, z^{-\tau}\cdot\Gamma(1-\tau)}{\Gamma(1-\tau)^2} =$$

$$= \lim_{\tau\to k} (\tau-k)\cdot\left[\frac{\Gamma'(1-\tau)}{\Gamma(1-\tau)} - \ln(z)\right] = \lim_{\tau\to k} (\tau-k)\cdot\left[\Psi(1-\tau) - \ln(z)\right]$$

La funzione **(Gatteschi - Funzioni speciali)** $\Psi(\tau) = \dfrac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)}$ possiede lo sviluppo:

$\Psi(\tau) = -C_e + \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+h} - \frac{1}{\tau+h}\right)$ dove $C_e = \Psi(1)$ è la costante di Eulero e quindi

$$\Psi(1-\tau) = -C_e + \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1-\tau+h}\right) = -C_e + \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{-\tau}{(1+h)\cdot(1+h-\tau)}\right) = -C_e + \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\tau}{h\cdot(h-\tau)}\right)$$

Sostituendo questo sviluppo si ritorna a:

$$\int_\sigma r_k\left(\frac{P}{P}\right) d\sigma_P = \lim_{\tau\to k} (\tau-k)\cdot\left(-C_e + \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\tau}{h\cdot(h-\tau)}\right) - \ln(z)\right)$$

$$\int_\sigma r_k\left(\frac{P}{P}\right) d\sigma_P = -\lim_{\tau\to k} [C_e + \ln(z)]\,(\tau-k) + \lim_{\tau\to k} (\tau-k) \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{h\cdot(\tau-h)}\right)$$

Per $\tau \to k$ il primo limite è nullo e l'unico addendo non nullo della sommatoria è quello con h = k che

tende ad 1 , e da ciò risulta $\int_\sigma r_k\left(\frac{P}{P}\right) d\sigma_P = 1$, che avendo estinto per integrazione ogni variabile in σ, è

un modulo di vettore unitario che in τ' deve essere $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

La trasformazione $\frac{\overline{\tau'}}{|\tau'|^2} = \tau'''$ trasforma il cerchio unitario $e^{i\theta}$, a cui appartiene $e^{i\frac{\pi}{2}}$, in se stesso

percorso in modo controrotante $e^{-i\theta}$.

Supponiamo ora che l'osservatore **A** in R il cui piano temporale sia correlato con quello di **B** in R' secondo le modalità precedenti, e la funzione analitica a parte olomorfa non nulla $\tau'''= F(\tau'')$ abbia una funzione inversa ad un sol valore $\tau'' = F^{-1}(\tau''')$.

Per un teorema di Riemann esiste sempre $F(\tau'')$ per τ'' non invadente tutto il piano che corrisponde al cerchio unitario di τ'''.

Per ottenere la trasformazione complessiva $\tau' = \Phi(\tau)$ si fa corrispondere a ciascuna linea $\tau'' = F^{-1}(e^{-i\theta})$

quella in τ ottenuta da $\tau'' = \frac{\overline{\tau}}{|\tau|^2}$.

Quest'ultima trasformazione non modifica ancora le unità temporali ed ogni modifica va imputata a quella intermedia $\tau'''= F(\tau'')$.

Il modulo $\left|\frac{dF}{d\tau''}\right|$ è l'amplificazione lineare della trasformazione, ed in particolare tra $Re(\tau'') = k$ e

$Re(\tau'') = k + 1$ la lunghezza dell'arco di curva è il tempo unitario τ''' visto dall'osservatore **A** che uguaglia il tempo unitario in τ'.

Il suo valore è appossimato per lieve difetto da $\left|\frac{dF}{d\tau''}\right|_{k+\lambda}$ con $0<\lambda<1$, trasformando la curva in una

spezzata che è la più breve congiungente i successivi punti di τ'' a parte reale intera situati sulla curva.

Sempre nell'ipotesi di invertibilità della funzione analitica complessiva $\tau' = \Phi(\tau)$ si giunge alla conclusione che è sempre possibile trasformare una linea chiusa in τ in un cerchio unitario in τ' e far corrispondere un modulo di vettore, che collega l'origine con il punto Q in σ, al modulo unitario in σ' mantenendo inalterate le linee di luce.

Consegue che due piani τ e τ' trasformabili nel cerchio unitario di τ^* mediante $\tau^* = \Phi(\tau)$ e $\tau^* = \Phi'(\tau')$ invertibili, sono trasformabili tra loro mediante $\tau' = \Phi'^{-1}[\Phi(\tau)]$ e $\tau = \Phi^{-1}[\Phi'(\tau')]$.

Le costrizioni a cui è soggetta la parte olomorfa della funzione intermedia $\tau'''= F(\tau'')$ di far corrispondere i punti all'infinito di τ''' e τ'' , di essere invertibile, e di conservare le unità di misura, la restringono alla forma $\tau'''= e^{i\theta}\tau''$, mentre, se cessano le condizioni di invertibilità e di conservazione delle unità di

misura, ogni serie di potenze con un raggio di convergenza infinito ed ogni polinomio in τ'' realizzano le altre condizioni.
Le trasformazioni che conservano anche l'istante zero per due osservatori sono del tipo

$\tau''' = e^{i\theta}\tau'' + a_1\tau''^2 + a_2\tau''^3 + \cdots\cdots\cdots$ dove le a_i sono numeri complessi che si annullano nelle trasformazioni invertibili.

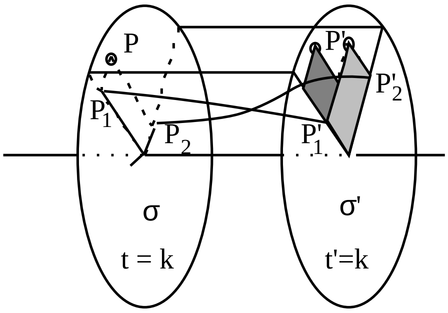
Prima di studiare le varie trasformazioni complessive $\tau' = \Phi'^{-1}[\Phi(\tau)]$ che si possono rinominare $\tau' = \Psi(\tau)$, conviene capire come si collegano gli spazi σ e τ di una singola rappresentazione.
Un modulo di vettore che unisce l'origine al punto Q in σ' (che per ora è uno spazio di moduli), si trasforma come i vettori a sola componente immaginaria del piano τ' dell'osservatore **B** , e corrisponde ad un vettore osservato da **A** oppure a più vettori quando una funzione $\tau''' = F(\tau'')$ non è lineare ed ha una funzione inversa a più valori.

Due moti distinti dei punti fisici P e Q contenenti rispettivamente l'informazione $r_k\left(\frac{P}{R}\right)$ e $r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$, sono osservati da **A** situato nel punto R di σ nell'istante k dell'asse reale t.
I due piani complessi non hanno ragioni per essere sovrapposti, ma basta che coincidano gli assi reali e ciò equivale all'ipotesi di esistenza di spazi σ almeno tridimensionali.
La simmetria tra le equazioni integrali omogenee di Fredholm e quelle associate, che discende dalla simmetria tra righe e colonne delle matrici quadrate, suggerisce che il passaggio tra $r_k\left(\frac{P}{R}\right)$ e $r_k\left(\frac{P}{R'}\right)$ per una stessa P sia uguale a quello che per un solo osservatore in R fa passare da $r_k\left(\frac{P}{R}\right)$ a $r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$.

Così la trasformazione tra $r_k\left(\frac{P}{R}\right)$ e $r_k\left(\frac{P}{R'}\right)$ può avvenire su un piano ruotato di un angolo ϕ rispetto a quella tra $r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$ e $r_k\left(\frac{Q}{R'}\right)$ anche se |P| e |Q| fossero componenti di un unico vettore.
Se possono calcolarsi dei residui come integrali su linee chiuse che avvolgono i punti singolari con parte reale unitaria della funzione $\frac{1}{2\pi i} \cdot R\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right)$, all'interno del segmento unitario il tempo reale non è unidirezionale e quindi l'angolo di rotazione dei piani complessi intorno all'asse t è una nuova variabile indipendente ϕ.

Il vettore unitario $e^{i\frac{\pi}{2}}$ del piano fisso t deve essere sostituito da $e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\phi}$.
Poiché l'ordine secondo cui l'osservatore **A** sceglie i piani complessi relativi alle trasformazioni di P e Q non può incidere su una legge di natura, l'osservatore **B** in R' otterrà due moduli di vettori che non sa disporre nel suo spazio σ'.
Lo strumento per ordinare in σ' ciò che è ordinato in σ senza che intervenga la variabile τ, ovvero per trasferire informazioni d' ordine da **A** a **B** è l'esponente $i\frac{\pi}{2} + j\phi$ che è a sua volta un numero complesso con ϕ variabile libera.

Se ciascun piano complesso trasforma nell'altro un solo modulo di vettore immaginario $e^{i\frac{\pi}{2} + j\phi_h}$, e se ciascuna trasformazione viene fatta su due piani per le componenti P_h distinte secondo lo schema:



i due moduli di vettori senza ordine danno in σ' uno qualsiasi dei punti P'.

L'uso di tre piani complessi di angoli ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 a partire da uno zero arbitrario di σ permette di stabilire in σ' quale delle due componenti è trasferita su due piani e quindi metterle in ordine a partire da uno zero altrettanto arbitrario.
Se una componente vettoriale può essere trasferita da σ a σ' su un numero di piani quanto vale il suo numero d'ordine, ciò permette di ricostruire in σ' le stutture di σ e neppure pone un limite alle dimensioni di tali spazi.