

Appendice 0

Definizioni sve e di somma e prodotto di sve:

Le componenti di un vettore hanno tra loro un legame intrinseco tale da far sì che, ruotando opportunamente gli assi del riferimento cartesiano, si possa ottenere nel sistema di assi ruotato una sola componente diversa da zero.

Siccome la scelta degli assi è un arbitrio della rappresentazione, tale scelta maschera la sostanziale unicità del vettore che in un sistema scelto opportunamente è rappresentato da un numero.

Per indicare il vettore gli si attribuisce un fattore j di incommensurabilità con il primo numero scrivendo:

$$(s, jv)$$

E' allora sempre possibile formare una coppia ordinata di numeri reali facendo precedere uno da un altro da esso indipendente come il numero vettore e quindi, ricordando che per il numero v possono esistere diverse scomposizioni, si usano le operazioni definite sui numeri complessi.

Usando le sole definizioni di somma e prodotto per gli scalari, di prodotto di un vettore per uno scalare, di somma e prodotto scalare per i vettori, e in seguito di applicazione lineare, si scrive:

$$(s_1, jv_1) + (s_2, jv_2) = (s_1 + s_2, j[v_1 + v_2])$$

$$(s_1, jv_1) \cdot (s_2, jv_2) = (s_1 s_2 + j^2 v_1 v_2, j[s_1 v_2 + s_2 v_1])$$

Proprietà di gruppo degli sve:

Elemento unitario

$$(1, j0) \cdot (s_2, jv_2) = (s_2, jv_2)$$

$$(s_1, jv_1) \cdot (1, j0) = (s_1, jv_1)$$

Inverso $S_* = (s_*, jv_*)$ di $S = (s, jv)$

$$(ss_* + j^2 vv_*, j[sv_* + s_* v]) = (1, j0) \quad ; \quad ss_* + j^2 vv_* = 1 \quad ; \quad sv_* + s_* v = 0$$

$$v_* = -\frac{s_* v}{s} \quad ; \quad ss_* - j^2 v \frac{s_* v}{s} = 1 \quad ; \quad s_* = \frac{s}{s^2 - j^2 v^2} \quad ; \quad v_* = -\frac{v}{s^2 - j^2 v^2}$$

Il denominatore $s^2 - j^2 v^2 \neq 0$ può essere posto: $s^2 - j^2 v^2 > 0$ siccome s e v hanno unità di misura distinte.

Associatività

$$(s_1, jv_1) \cdot (s_2, jv_2) \cdot (s_3, jv_3) = (s_1 s_2 + j^2 v_1 v_2, j[s_1 v_2 + s_2 v_1]) \cdot (s_3, jv_3)$$

$$(s_1, jv_1) \cdot (s_2, jv_2) \cdot (s_3, jv_3) = (s_1, jv_1) \cdot (s_2 s_3 + j^2 v_2 v_3, j[s_2 v_3 + s_3 v_2])$$

$$(s_1 s_2 + j^2 v_1 v_2, j[s_1 v_2 + s_2 v_1]) \cdot (s_3, jv_3) =$$

$$= (s_1 s_2 s_3 + j^2 v_1 v_2 s_3 + j^2 s_1 v_2 v_3 + j^2 s_2 v_1 v_3, j[s_1 s_2 v_3 + j^2 v_1 v_2 v_3, s_1 v_2 s_3 + s_2 v_1 s_3])$$

$$(s_1, jv_1) \cdot (s_2 s_3 + j^2 v_2 v_3, j[s_2 v_3 + s_3 v_2]) =$$

$$= (s_1 s_2 s_3 + j^2 s_1 v_2 v_3 + j^2 v_1 s_2 v_3 + j^2 v_1 s_3 v_2, j[v_1 s_2 s_3 + j^2 v_1 v_2 v_3, s_1 s_2 v_3 + s_1 s_3 v_2])$$

Se il fattore di incommensurabilità j è un vettore dello spazio di v , ju è uno scalare e si ricade nel caso dei numeri complessi ordinari.

Se 2 è la dimensione dello spazio vettoriale e $i = \sqrt{-1}$, il vettore $j = (\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})$ è la traccia della matrice diagonale tale che sia $j^2 = -1$

Se n è la dimensione dello spazio vettoriale e $i = \sqrt{-1}$, il vettore $j = (\frac{i}{\sqrt{n}} + \frac{i}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{i}{\sqrt{n}})$ è

la traccia di una matrice diagonale tale che sia $j^2 = -1$ e se anche v è interpretato come matrice diagonale

la traccia ju si scrive:
$$ju = (\frac{iv_1}{\sqrt{n}} + \frac{iv_2}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{iv_n}{\sqrt{n}}) = i(\frac{v_1}{\sqrt{n}} + \frac{v_2}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{v_n}{\sqrt{n}})$$

e poi $j^2 v = (-1)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}) \cdot (v_1 + v_2 + \dots + v_n)$

Affinché il prodotto ju sia un vettore, il fattore di incommensurabilità j deve essere o uno scalare o la traccia della matrice che trasforma v in ju e tale che $(ju)^2 = -v^2$.

Proprietà algebriche degli sve:

Si può esprimere il quadrato di (s,ju) come: $(s,ju)^2 = (ss-vv,j^2sv) = (s_2, jv_2)$.

Poi $S^3 = (s,ju)^3 = (sss-3svv,j[3ssv-vvv]) = (s_3, jv_3)$

I coefficienti delle componenti scalari e vettoriali (in grassetto) di S^n sono dati da:

potenza	coefficienti
(s,ju)	1 1
$(s,ju)^2$	1 2 1
$(s,ju)^3$	1 3 3 1
$(s,ju)^4$	1 4 6 4 1
$(s,ju)^5$	1 5 10 10 5 1

$$(s,ju)^{2n} = \binom{2n}{0} \binom{2n}{1} \binom{2n}{2} \binom{2n}{3} \dots \binom{2n}{2n-1} \binom{2n}{2n}$$

$$(s,ju)^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} \binom{2n+1}{1} \binom{2n+1}{2} \binom{2n+1}{3} \dots \binom{2n+1}{2n} \binom{2n+1}{2n+1}$$

$$S^{2n} = (s,ju)^{2n} = (s_{2n}, jv_{2n})$$

$$s_{2n} = \binom{2n}{0} s^{2n} + \binom{2n}{2} s^{2n-2} v^2 + \binom{2n}{4} s^{2n-4} v^4 + \dots + \binom{2n}{2n-2} s^2 v^{2n-2} + \binom{2n}{2n} v^{2n}$$

$$v_{2n} = \binom{2n}{1} s^{2n-1} v + \binom{2n}{3} s^{2n-3} v^3 + \binom{2n}{5} s^{2n-5} v^5 \dots \binom{2n}{2n-3} s^3 v^{2n-3} + \binom{2n}{2n-1} s v^{2n-1}$$

In generale, se p e d sono rispettivamente i numeri pari e dispari con $0 \leq p \leq 2n$ e $1 \leq d \leq 2n-1$, si può scrivere:

$$s_{2n} = \sum_p \binom{2n}{p} s^{2n-p} v^p ; \quad v_{2n} = \sum_d \binom{2n}{d} s^{2n-d} v^d$$

$$(s, jv)^{2n+1} = (s_{2n+1}, jv_{2n+1})$$

$$s_{2n+1} = \binom{2n+1}{0} s^{2n+1} + \binom{2n+1}{2} s^{2n-1} v^2 + \binom{2n+1}{4} s^{2n-3} v^4 + \dots + \binom{2n+1}{2n-2} s^3 v^{2n-2} + \binom{2n+1}{2n} s v^{2n}$$

$$v_{2n+1} = \binom{2n+1}{1} s^{2n} v + \binom{2n+1}{3} s^{2n-2} v^3 + \binom{2n+1}{5} s^{2n-4} v^5 + \dots + \binom{2n+1}{2n-1} s^2 v^{2n-1} + \binom{2n+1}{2n+1} v^{2n+1}$$

Se ancora p e d sono rispettivamente i numeri pari e dispari con $0 \leq p \leq 2n$ e $1 \leq d \leq 2n+1$, si può scrivere:

$$s_{2n+1} = \sum_p \binom{2n+1}{p} s^{2n+1-p} v^p ; \quad v_{2n+1} = \sum_d \binom{2n+1}{d} s^{2n+1-d} v^d$$

Riassumendo:

$$(s, jv)^{2n} = \left(\sum_p \binom{2n}{p} s^{2n-p} v^p , j \left[\sum_d \binom{2n}{d} s^{2n-d} v^d \right] \right)$$

$$(s, jv)^{2n+1} = \left(\sum_p \binom{2n+1}{p} s^{2n+1-p} v^p , j \left[\sum_d \binom{2n+1}{d} s^{2n+1-d} v^d \right] \right)$$

Se l'esponente di (s, jv) è k e P e D sono rispettivamente i massimi pari e dispari contenuti in k le potenze :

$$(s, jv)^k = \left(\sum_p \binom{k}{p} s^{k-p} v^p \cdot j \left[\sum_d \binom{k}{d} s^{k-d} v^d \right] \right)$$

$$(s, jv)^k = \left(\sum_p \binom{k}{p} s^{k-p} v^p \cdot j \left[\sum_d \binom{k}{d} s^{k-d} v^{d-1} \right] \cdot v \right)$$

Dato il nome agli scalari $A_k = \sum_p \binom{k}{p} s^{k-p} v^p$, e $B_k = \sum_d \binom{k}{d} s^{k-d} v^{d-1}$

si mostra che l'elevazione a potenza non cambia la direzione del vettore scrivendo:

$$S^k = (s, jv)^k = (A_k \cdot j B_k) v$$

Fissata un'infinità di sve $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, si può formare la serie di potenze

$\Sigma = \sum_0^{\infty} S_n \cdot (s, jv)^n$ che rappresenta una funzione intera di (s, jv) e converge quando

convergono separatamente la parte scalare e la parte vettoriale.