(Appendice 0) **Definizioni di sve e di somma e prodotto di sve**

Le componenti di un vettore hanno tra loro un legame intrinseco tale da far sì che, ruotando opportunamente gli assi del riferimento cartesiano, si possa ottenere nel sistema di assi ruotato una sola componente diversa da zero.

Siccome la scelta degli assi è un arbitrio della rappresentazione, tale scelta maschera la sostanziale unicità del vettore che in un sistema scelto opportunamente è rappresentato da un numero.

Per indicare il vettore gli si attribisce un fattore j di incommensurabilità, che è una matrice unitaria dipendente dall'osservatore, con i numeri che da esso non dipendono.

Una coppia di numeri così definiti come scalare e vettore si scrive come

(s , jv)

È allora sempre possibile formare una coppia ordinata di numeri reali facendo precedere uno da un altro da esso indipendente come il numero vettore e quindi, ricordando che per il numero v possono esistere diverse scomposizioni, si usano le operazioni definite sui numeri complessi.

Usando le sole definizioni di somma e prodotto per gli scalari, di prodotto di un vettore per uno scalare, di somma e prodotto scalare per i vettori, e in seguito di applicazione lineare, si scrive:

$$(s_1,jv_1) + (s_2,jv_2) = (s_1+s_2 , j[v_1+v_2])$$

$$(s_1,jv_1) \cdot (s_2,jv_2) = (s_1s_2 + j^2v_1v_2 , j[s_1v_2 + s_2 v_1])$$

Proprietà di gruppo degli sve:

Elemento unitario

$$(1,j0) \cdot (s_2,jv_2) = (s_2,jv_2)$$

$$(s_1,jv_1) \cdot (1,j0) = (s_1,jv_1)$$

Inverso $S_* = (s_*,jv_*)$ di $S = (s,jv)$

$(ss_* + j^2vv_* , j[sv_* + s_* v]) = (1,j0)$;

$ss_* + j^2vv_* = 1$; $sv_* + s_* v = 0$

$v_* = - \dfrac{s_* v}{s}$; $ss_* - j^2v \dfrac{s_* v}{s} = 1$;

$s_* = \dfrac{s}{s^2 - j^2v^2}$; $v_* = - \dfrac{v}{s^2 - j^2v^2}$

Il denominatore $s^2 - j^2v^2 \neq 0$ può essere posto: $s^2 - j^2v^2 > 0$ siccome s e v hanno unità di misura distinte.

Associatività

$(s_1,jv_1) \cdot (s_2,jv_2) \cdot (s_3,jv_3) = (s_1s_2 + j^2v_1v_2 , j[s_1v_2 + s_2 v_1]) \cdot (s_3,jv_3)$

$(s_1,jv_1) \cdot (s_2,jv_2) \cdot (s_3,jv_3) = (s_1,jv_1) \cdot \{s_2s_3 + j^2v_2v_3 , j[s_2v_3 + s_3 v_2]\}$

$\{s_1s_2 + j^2v_1v_2 , j[s_1v_2 + s_2 v_1]\} \cdot (s_3,jv_3) =$

$= [s_1s_2s_3+ j^2v_1v_2s_3 + j^2s_1v_2v_3 + j^2s_2v_1v_3] ,$

$j[s_1s_2v_3+ j^2v_1v_2v_3 , s_1v_2s_3 + s_2v_1s_3]$;

$(s_1,jv_1) \cdot \{s_2s_3 + j^2v_2v_3 , j[s_2v_3 + s_3 v_2]\} =$

$= \{s_1s_2s_3 + j^2s_1v_2v_3 + j^2v_1s_2v_3 + j^2v_1s_3v_2 ,$

$j[v_1s_2s_3 + j^2v_1v_2v_3 , s_1s_2v_3 + s_1s_3v_2\}$

Se per un certo osservatore il fattore di incommensurabilità j è una matrice diagonale dello spazio delle componenti di v, anch'essa è interpretabile come vettore e jv è uno scalare e si ricade nel caso dei numeri complessi ordinari.

Se 2 è la dimensione dello spazio vettoriale e $i = \sqrt{-1}$, il vettore

$j = (i\,,-i) = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}, -e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ mentre zero è la traccia della matrice diagonale tale che dà $j = 1$.

Se n è la dimensione dello spazio vettoriale e $i = \sqrt{-1}$, il vettore

$j = \left(e^{i\frac{\pi}{n}}, e^{i\frac{\pi}{n}}, e^{i\frac{\pi}{n}}, \pm e^{i\frac{\pi}{n}}\right)$ e zero è ancora la traccia di una matrice diagonale.

Proprietà algebriche degli sve:

Si può esprimere il quadrato di (s,jv) come: $(s,jv)^2 = (ss\text{-}vv, j2sv) =$
$= (s_2, jv_2)$.

Poi $S^3 = (s,jv)^3 = (sss\text{-}3svv, j[3ssv\text{-}vvv]) = (s_3, jv_3)$

I coefficenti delle componenti scalari e vettoriali (in grassetto) di S^n sono dati da:

potenza	coefficienti
(s,jv)	1 **1**
$(s,jv)^2$	1 **2** 1
$(s,jv)^3$	1 **3** 3 **1**
$(s,jv)^4$	1 **4** 6 **4** 1
$(s,jv)^5$	1 **5** 10 **10** 5 **1**

$(s,jv)^{2n}$ $\qquad \binom{2n}{0}\boldsymbol{\binom{2n}{1}}\binom{2n}{2}\boldsymbol{\binom{2n}{3}} \ldots \boldsymbol{\binom{2n}{2n-1}}\binom{2n}{2n}$

$(s,jv)^{2n+1}$ $\qquad \binom{2n+1}{0}\boldsymbol{\binom{2n+1}{1}}\binom{2n+1}{2}\boldsymbol{\binom{2n+1}{3}} \ldots \binom{2n+1}{2n}\boldsymbol{\binom{2n+1}{2n+1}}$

La potenza pari dello sve $S^{2n} = (s,jv)^{2n} = (s_{2n}, jv_{2n})$ con

$$s_{2n} = \binom{2n}{0} s^{2n} + \binom{2n}{2} s^{2n-2} v^2 + \binom{2n}{4} s^{2n-4} v^4 + \dots + \binom{2n}{2n-2} s^2 v^{2n-2} +$$

$$+ \binom{2n}{2n} v^{2n}$$

$$v_{2n} = \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{1}} s^{2n-1} v + \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}} s^{2n-3} v^3 +$$

$$+ \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{5}} s^{2n-5} v^5 \dots \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{2n-3}} s^3 v^{2n-3} + \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{2n-1}} s\, v^{2n-1}$$

termina con lo scalare $\binom{2n}{2n} v^{2n}$, mentre

$$S^{2n+1} = (s,jv)^{2n+1} = (s_{2n+1}, jv_{2n+1})$$

$$s_{2n+1} = \binom{2n+1}{0} s^{2n+1} + \binom{2n+1}{2} s^{2n-1} v^2 +$$

$$+ \binom{2n+1}{4} s^{2n-3} v^4 + \dots + \binom{2n+1}{2n-2} s^3 v^{2n-2} + \binom{2n+1}{2n} s\, v^{2n}$$

$$v_{2n+1} = \binom{2n+1}{1} s^{2n} v + \binom{2n+1}{3} s^{2n-2} v^3 +$$

$$+ \binom{2n+1}{5} s^{2n-4} v^5 + \dots + \binom{2n+1}{2n-1} s^2 v^{2n-1} + \binom{2n+1}{2n+1} v^{2n+1}$$

termina con il vettore $\binom{2n+1}{2n+1} v^{2n+1}$.

In ogni caso la parte scalare è una somma di coefficienti con potenze pari del vettore, ovvero scalari, mentre per la parte vettoriale ogni addendo è uno scalare con il vettore v per fattore e ciò permette di scrivere:

$$S^k = (s,jv)^k = (A_k, jB_k.v)$$

Fissata un'infinità di sve $S_0, S_1, S_2 .... S_n ....$, si può formare la serie di potenze

$$\Sigma = \sum_{0}^{\infty} S_n \cdot (s,jv)^n$$ che rappresenta una funzione intera di (s,jv) e converge quando convergono separatamente la parte scalare e la parte vettoriale.